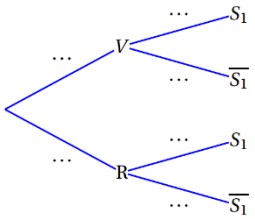
EXERCICE N°3 : 25' 4 points

Une urne contient trois dés équilibrés, deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (les résultats seront données sous forme de fractions).
On considère les évènements suivants : V « le dé tiré est vert ».
R « le dé tiré est rouge ».
S_1 « on obtient 6 au lancer du dé ».



1°) On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.
a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.
b) Calculer la probabilité $p(S_1)$.
c) Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.

2°) On tire au hasard un dé de l'urne. Pour tout entier naturel n non nul, on lance n fois de suite ce dé.
On désigne par S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n lancés ».
a) Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n.
b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun de n lancers.
Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.
c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n \geq n_0$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - e^{-x}$.
On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2cm).

1°) a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) > 0$.
b) Dresser le tableau des variations de f sur $]-1,+\infty[$.

2°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]-1,+\infty[$ une unique solution α.
Vérifier que : $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

3°) Tracer (ζ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit n un entier naturel non nul. On pose U_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, n]$.
a) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.
b) En déduire que : $\int_0^n \dfrac{x-1}{x+1}\,dx = n - 2\ln(n+1)$.
c) Montrer que $U_n = 1 + \dfrac{e^{-n}-1}{n} - \dfrac{2\ln(n+1)}{n}$.
d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn